Ueber die

Beziehungen zwischen den 27 Geraden auf einer Fläche 3. Ordnung und den 28 Doppeltangenten einer ebenen Kurve 4. Ordnung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Philosophischen Fakultät zu Rostock

vorgelegt von

Max Zacharias,

Oberlehrer an der 12. Realschule zu Berlin.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Göttingen,

Druck der Universitäts-Buchdruckerei von W. Fr. Kaestner.

1903.

Referent:

Prof. Dr. Staude, kais. russ. Staatsrat a. D.

Einleitung.

Im ersten Bande der Mathematischen Annalen macht Herr Geiser in der Abhandlung „Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Kurve 4. Grades“ auf eine sehr einfache und anschauliche Beziehung aufmerksam, die zwischen den geraden Linien auf einer Fläche 3. Ordnung und den Doppeltangenten einer ebenen Kurve 4. Ordnung besteht. Wie Herr Geiser an dieser Stelle, sowie in der Abhandlung „Ueber die Steinerschen Sätze von den Doppeltangenten der Kurven 4. Grades“ im 72. Bande des Crelleschen Journals an einigen Beispielen zeigt, gestattet diese merkwürdige Beziehung, viele Eigenschaften der 28 Doppeltangenten der Kurven 4. Ordnung aus entsprechenden Eigenschaften der 27 Geraden einer Fläche 3. Ordnung abzuleiten.

Die von Herrn Geiser nachgewiesene Beziehung kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

1. Projiziert man die Punkte einer gegebenen Fläche 3. Ordnung von irgend einem auf ihr gelegenen, aber keiner ihrer Geraden angehörigen Punkte auf eine beliebige Ebene, so sind die Projektionen der 27 Geraden der Fläche 27 Doppeltangenten derjenigen ebenen Kurve 4. Ordnung, in welcher der vom Projektionszentrum aus um die Fläche gelegte Tangentialkegel die Projektionsebene durchdringt. Die im Projektionszentrum an die Fläche gelegte Tangentialebene schneidet die Projektionsebene in der 28. Doppeltangente jener Kurve.

2. Wenn umgekehrt eine ebene Kurve 4. Ordnung C_4 gegeben ist, so kann man stets unzählig viele Flächen

3. Ordnung konstruieren, die zu jener in der hier erörterten Beziehung stehen. Zu diesem Zwecke lege man durch eine beliebige Doppeltangente τ der Kurve C_4 eine von der Ebene der letzteren verschiedene Ebene e und wähle in dieser einen beliebigen, nicht in der Geraden τ liegenden Punkt P. Alsdann existieren unzählig viele Flächen 3. Ordnung von der Beschaffenheit, daß der Punkt P auf ihnen liegt, die Ebene e eine Tangentialebene derselben ist, die von P aus um die Flächen gelegten Tangentialkegel durch C_4 gehen, und die 27 Geraden jeder Fläche sich von P aus in die 27 von τ verschiedenen Doppeltangenten der Kurve C_4 projizieren (s. Math. Ann. I, S. 129—132).

Es ist ersichtlich, dass bei der Konstruktion der Flächen zu einer gegebenen Kurve eine der 28 Doppeltangenten eine Ausnahmestellung einnimmt, nämlich diejenige, durch welche die Ebene e gelegt wird. Ist τ diese Doppeltangente, so soll im folgenden eine beliebige der zugehörigen Flächen 3. Ordnung mit $F(\tau)$ bezeichnet werden.

Die vorliegende Arbeit verfolgt den Zweck, zu den wichtigsten Teilkonfigurationen, welche in der Gesamtheit der 27 Geraden einer Fläche 3. Ordnung vorkommen (wie den Gruppen von 3 in einer Ebene liegenden Geraden, den Gruppen von Dreiecken mit einer gemeinsamen Seite, den Gruppen von windschiefen Geraden, den Schläflischen Doppelsechsen, den Steinerschen Triederpaaren u. a.), die entsprechenden Systeme von Doppeltangenten aufzusuchen und deren Eigenschaften mittels der Geiserschen Beziehung aus den analogen Eigenschaften der Gruppen von geraden Linien abzuleiten. (Unter „geraden Linien“ schlechtweg sollen hier und im folgenden, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben wird, stets gerade Linien auf einer Fläche 3. Ordnung verstanden werden.)

Zu diesem Behufe werden zunächst (in § 1) die Gruppen von 3 geraden Linien festgestellt, denen 3 syzygetische, bezw. 3 azygetische Doppeltangenten (nach der Bezeichnung des Herrn Frobenius, Crelles Journal, Band 103, S. 151) entsprechen. Die hierauf bezügliche Folgerung am Schluß des § 1 verdient besondere Beachtung, weil sie allen späteren

Entwickelungen in dieser Arbeit als einheitliches Beweisprinzip zu Grunde liegt.

Bei diesen Entwickelungen wird von denjenigen Eigenschaften der geraden Linien, welche in den Sturmschen „Synthetischen Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung“ (besonders im 2. Kap. derselben) behandelt worden sind, meistens ohne Angabe der betreffenden Stellen dieses bekannten Werkes Gebrauch gemacht.

§ 1.

Unter den 28 Doppeltangenten einer gegebenen allgemeinen ebenen Kurve 4. Ordnung C_4 sei eine beliebige ausgewählt und mit τ bezeichnet; ihre Berührungspunkte seien A und B.

Die 27 Geraden einer Fläche $F(\tau)$ bilden 45 Dreiecke. Die Seiten eines derselben seien mit g_1, g_2 und g_3 bezeichnet. Die Ebenen (P, g_1), (P, g_2) und (P, g_3) sind Doppelberührungsebenen der Fläche und ihre Berührungspunkte liegen paarweise in den Geraden g_1, g_2 und g_3. Die Berührungspunkte von (P, g_α) seien R_α, S_α $(\alpha = 1, 2, 3)$. Da diese 6 Punkte R, S der ersten Polare F_2 des Punktes P in bezug auf die Fläche $F(\tau)$ angehören, so liegen sie auf einem Kegelschnitte C_2. Den 3 in einer Ebene liegenden Geraden von $F(\tau)$ entsprechen demnach 3 Doppeltangenten t_1, t_2, t_3 von C_4, deren 6 Berührungspunkte einem Kegelschnitte C_2' angehören. Drei solche Doppeltangenten sollen nach der von Herrn Frobenius eingeführten Bezeichnung „syzygetisch“ (abgekürzt syz.) genannt werden.

Da die Geraden PA und PB der Polare F_2 angehören, so werden sie von dem Kegelschnitte C_2 getroffen. A und B liegen also auch auf dem Kegelschnitte C_2'. Die 3 syz. Doppeltangenten t_1, t_2, t_3 bestimmen demnach noch eine 4. Doppeltangente τ, deren Berührungspunkte auf demselben Kegelschnitte liegen. Also entsprechen je 2 sich schneidenden Geraden von $F(\tau)$ 2 Doppeltangenten, die mit τ ein syz. Tripel bilden. Vier solche Doppeltangenten, deren 8 Berührungspunkte auf einem und dem-

selben Kegelschnitte liegen, sollen als ein „syz. Quadrupel“ bezeichnet werden.

Es sei nun $\tau t_1 t_2$ irgend ein syz. Tripel von Doppeltangenten. Dann läßt sich nachweisen, daß auf einer Fläche $F(\tau)$ den Doppeltangenten t_1 und t_2 2 sich schneidende Gerade g_1 und g_2 entsprechen. Sind nämlich R_1, S_1 und R_2, S_2 die auf den Geraden g_1 und g_2 liegenden Berührungspunkte der Doppelberührungsebenen (P, g_1) und (P, g_2), so gehören die 6 Geraden PA, PB, PR_1, PS_1, PR_2, PS_2 einem Kegel 2. Ordnung K_2 an. Die Ebene (g_1, R_2) schneidet die Polare F_2 in einem Kegelschnitte, der durch die Punkte R_1, S_1, R_2 geht und die auf F_2 liegenden Geraden PA und PB in je einem Punkte A' und B' trifft. Dieser Kegelschnitt ist aber identisch mit dem Durchschnitte von (g_1, R_2) und K_2; denn durch die 5 Punkte R_1, S_1, R_2, A', B' läßt sich nur ein Kegelschnitt legen. Er trifft also auch die Gerade PS_2 in einem Punkte U. Da dieser der Fläche F_2 angehört, welche mit der Geraden PS_2 außer den Punkten P und S_2 keinen dritten Punkt gemein haben kann, so muß er mit einem dieser beiden Punkte identisch sein. Wäre $U \equiv P$, so würden PR_1, PS_1 und PR_2 in der Ebene (g_1, R_2) liegen, die demnach mit der Ebene (P, g_1) zusammenfallen müßte. Von den 6 Berührungspunkten der 3 Doppeltangenten τ, t_1, t_2 würden daher die den Punkten R_1, S_1 und R_2 entsprechenden in einer geraden Linie liegen, was offenbar bei einer allgemeinen Kurve C_4 nicht möglich ist. Demnach ist $U \equiv S_2$, d. h. die beiden Geraden g_1 und g_2 liegen, wie behauptet, in einer Ebene. Sie bestimmen nun in ihrer Ebene eindeutig eine dritte Gerade g_3 und die dieser Geraden entsprechende Doppeltangente t_3 bildet mit den 3 syz. Doppeltangenten $\tau t_1 t_2$ ein syz. Quadrupel. Je 3 syz. Doppeltangenten werden also stets durch eine und nur eine vierte Doppeltangente zu einem syz. Quadrupel ergänzt.

Es fragt sich jetzt, was für ein System von geraden Linien irgend 4 syz. Doppeltangenten auf einer beliebigen Fläche $F(\tau)$ entspricht, wenn die Doppeltangente τ nicht dem Quadrupel selbst angehört. Ist $t_1 t_2 t_3 t_4$ ein beliebiges

syz. Quadrupel von Doppeltangenten, so entsprechen zunächst auf der Fläche $F(t_4)$ den 3 Doppeltangenten t_1, t_2, t_3 3 Gerade g_1, g_2, g_3, die in einer Ebene liegen. Da nun jede andere Gerade g eine dieser 3 Geraden schneidet und zu den beiden andern windschief ist, so bildet jede beliebige fünfte Doppeltangente t mit einem der 3 Paare $t_1 t_4$, $t_2 t_4$, $t_3 t_4$ ein syz. Tripel, mit den beiden andern dagegen „azygetische“ (abgekürzt azyg.) Tripel (d. h. solche, deren 6 Berührungspunkte nicht notwendig auf einem Kegelschnitte liegen; Frobenius, a. a. O.). Allgemeiner gesprochen: Wenn man 3 solche Paare von Doppeltangenten eines syz. Quadrupels betrachtet, in denen eine und dieselbe Doppeltangente vorkommt, so ergänzt jede fünfte Doppeltangente t eines dieser Paare zu einem syz. Tripel, die beiden andern zu azyg. Tripeln. Entsprechen nun dem syz. Quadrupel $t_1 t_2 t_3 t_4$ auf der Fläche $F(t)$ die 4 Geraden $g_1' g_2' g_3' g_4'$, so muß jener Eigenschaft zufolge jede derselben eine der übrigen schneiden, die beiden andern aber nicht. Angenommen, g_1' werde von g_2' geschnitten, dagegen nicht von g_3' und g_4', so müssen g_3' und g_4' auch zu g_2' windschief sein; denn auch g_2' darf nur von einer der 3 andern Geraden geschnitten werden. Dagegen müssen g_3' und g_4' einander schneiden, da jede von ihnen weder von g_1' noch von g_2' getroffen wird. Da jede Gerade der Fläche in jedem Dreieck eine Seite schneidet, so müssen g_3' und g_4' die dritte Gerade der Ebene (g_1', g_2') treffen. Dem syz. Quadrupel $t_1 t_2 t_3 t_4$ entsprechen also auf der Fläche $F(t)$ zwei Paare sich schneidender Geraden, die mit einer und derselben fünften Geraden zwei Dreiecke bilden. Zwei solche Paare mögen der Kürze wegen als ein „Doppelzweiseit“ und die fünfte Gerade als die „ergänzende Gerade“ desselben bezeichnet werden.

Ist nun umgekehrt auf einer Fläche $F(\tau)$ irgend ein Doppelzweiseit $(g_1 g_2; g_3 g_4)$ mit der ergänzenden Geraden g_5 gegeben, so mögen den 5 Geraden die 5 Doppeltangenten $t_1 t_2 t_3 t_4 t_5$ entsprechen. Geht man dann zu einer Fläche $F(t_4)$ über, so seien die den Doppeltangenten $t_1 t_2 t_3 t_5 \tau$ entsprechenden Geraden derselben mit $g_1' g_2' g_3' g_5' g'$ bezeichnet.

Da nun $t_3 t_4 t_5 \tau$ ein syz. Quadrupel ist, so bilden die Geraden $g_3' g_5' g'$ ein Dreieck. Da ferner auch das Quadrupel $t_1 t_2 t_5 \tau$ syz. ist, so bilden die Geraden $g_1' g_2' g_5' g'$ ein Doppelzweiseit. Die ergänzende Gerade kann, weil g_5' und g' einander schneiden, nur die dritte Gerade der Ebene (g_5', g'), nämlich g_3', sein. Mithin bilden die Geraden $g_1' g_2' g_3'$ ein Dreieck. Daraus aber folgt, daß das Quadrupel $t_1 t_2 t_3 t_4$ syz. ist. Jedes Doppelzweiseit wird also als ein syz. Quadrupel von Doppeltangenten projiziert.

Da jede Gerade 5 Dreiecken angehört, so gehören zu jedem der 45 Dreiecke der Fläche 12 andere, die eine Seite mit ihm gemein haben. Es gibt daher $\frac{45 \cdot 12}{2} = 270$ Doppelzweiseite.

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich demnach in folgenden Satz zusammenfassen:

Es gibt 315 syz. Quadrupel von Doppeltangenten (Hesse, Crelles Journ. Bd. 49, S. 321). Jede Doppeltangente τ kommt in 45 solchen Quadrupeln vor. Auf einer Fläche $F(\tau)$ entsprechen den Quadrupeln, die τ enthalten, die 45 Dreiecke, dagegen den Quadrupeln, die τ nicht enthalten, die 270 Doppelzweiseite.

Zugleich ergibt sich folgendes Resultat in bezug auf die Flächen 3. Ordnung:

Legt man durch einen Punkt P einer Fläche 3. Ordnung, der nicht einer Geraden der Fläche angehört, und durch die 4 Geraden eines Doppelzweiseits 4 Ebenen, so liegen die 8 Berührungspunkte derselben mit der Fläche auf einem Kegel 2. Ordnung mit der Spitze P.

Wegen der häufigen Anwendung bei den späteren Beweisen mag eine schon in den vorstehenden Entwickelungen implizite enthaltene Folgerung ausdrücklich hervorgehoben werden:

Drei gerade Linien entsprechen dann und nur dann drei syz. Doppeltangenten, wenn zwei von ihnen sich schneiden und die dritte entweder beide oder keine von beiden schneidet (wenn sie

sich 3 mal oder 1 mal schneiden); sie entsprechen mithin dann und nur dann drei azyg. Doppeltangenten, wenn zwei von ihnen windschief sind und die dritte entweder beide oder keine von beiden schneidet (wenn sie sich 2 mal oder 0 mal schneiden).

§ 2.

Nachdem im vorigen Paragraphen die Existenz von 315 syz. Quadrupeln von Doppeltangenten nachgewiesen worden, sollen nunmehr alle übrigen Quadrupel, die sich aus den 28 Doppeltangenten bilden lassen, näher untersucht und nach ihren Eigenschaften klassifiziert werden.

Die Zahl aller möglichen Quadrupel beträgt

$$\frac{28.27.26.25}{1.2.3.4} = 20475.$$

Es existieren also 20160 Quadrupel, die nicht syz. sind.

Es sei $\tau t_1 t_2 t_3$ ein syz. Quadrupel, $g_1 g_2 g_3$ das dem syz. Tripel $t_1 t_2 t_3$ entsprechende Dreieck der Fläche $F(\tau)$. Irgend eine fünfte Doppeltangente t habe die entsprechende Gerade g. Diese Gerade trifft eine und nur eine Seite des Dreiecks, beispielsweise g_1. Ersetzt man in dem syz. Quadrupel τ durch t, so erhält man ein neues Quadrupel $t t_1 t_2 t_3$ von folgender Beschaffenheit: Die beiden Tripel $t t_1 t_2$ und $t t_1 t_3$ sind azyg., dagegen die beiden Tripel $t t_2 t_3$ und $t_1 t_2 t_3$ syz. (Mit Hülfe der am Schluß des vorigen Paragraphen hervorgehobenen Folgerung lassen sich diese und alle ähnlichen späteren Behauptungen leicht verifizieren.) Dieses Quadrupel möge als ein „halbsyzygetisches" Quadrupel $t \overline{t_1 t_2 t_3}$ bezeichnet werden; der Strich über $t_2 t_3$ soll andeuten, daß die beiden mit diesem Paare gebildeten Tripel syz. sind.

Es sei g' diejenige Gerade, welche g und g_1 schneidet, und t' die zugehörige Doppeltangente. Dann kann das halbsyz. Quadrupel $t \overline{t_1 t_2 t_3}$ auch aus dem syz. Quadrupel $t t' t_2 t_3$ durch Vertauschung von t' mit t_1 entstanden gedacht werden.

Es gibt 24 halbsyz. Quadrupel, die aus dem gegebenen syz. Quadrupel $\tau t_1 t_2 t_3$ entstehen, wenn man eine seiner 4 Doppeltangenten, τ, der Reihe nach durch alle nicht dem Quadrupel angehörigen Doppeltangenten ersetzt. Im ganzen entstehen also aus jedem syz. 96 halbsyz. Quadrupel. Andererseits aber kann jedes halbsyz. Quadrupel aus 2 verschiedenen syz. Quadrupeln hervorgehen. Also ist die Zahl der halbsyz. Quadrupel $48.315 = 15120$.

Es verbleiben noch 5040 Quadrupel, die weder syz. noch halbsyz. sein können.

Jedes Quadrupel, welches ein syz. Tripel enthält, ist notwendig selbst ein syz. oder wenigstens halbsyz. Quadrupel. Es sei nämlich $\tau t_1 t_2$ ein syz. Tripel und $g_1 g_2$ das Paar sich schneidender Geraden, welches auf der Fläche $F(\tau)$ den Doppeltangenten $t_1 t_2$ entspricht. g_3 sei die dritte Gerade der Ebene (g_1, g_2), t_3 die entsprechende Doppeltangente. Dann ist das Quadrupel $\tau t_1 t_2 t_3$ syz. Setzen wir an die Stelle von t_3 eine Doppeltangente t_4 von der Beschaffenheit, daß die ihr entsprechende Gerade g_4 die Gerade g_3 schneidet, so ergibt sich ein halbsyz. Quadrupel $\tau t_4 t_1 t_2$. Schneidet endlich g_5 die Gerade g_1, und ist t_5 die zugehörige Doppeltangente, so erhält man, wenn man zu dem syz. Tripel $\tau t_1 t_2$ die Doppeltangente t_5 hinzufügt, das halbsyz. Quadrupel $\tau t_1 t_2 t_5$. Ebenso ergeben sich halbsyz. Quadrupel, wenn man das Tripel durch solche Doppeltangenten ergänzt, deren zugehörige Gerade g_2 treffen. Alle Quadrupel, die ein syz. Tripel enthalten, sind also, wie behauptet, entweder syz. oder halbsyz. Die 5040 Quadrupel dritter Art müssen also so beschaffen sein, daß jedes in ihnen enthaltene Tripel azyg. ist. Solche Quadrupel sollen als azyg. bezeichnet werden.

Daß azyg. Quadrupel existieren, läßt sich auch unabhängig von der voraufgehenden Betrachtung leicht zeigen. Es sei $\tau t_1 t_2$ ein azyg. Tripel. Dann entsprechen den Doppeltangenten $t_1 t_2$ auf der Fläche $F(\tau)$ 2 windschiefe Gerade $g_1 g_2$. Eine der Geraden, welche sowohl zu g_1 wie zu g_2 windschief sind, möge g_3 heißen, und t_3 sei die ihr entsprechende Doppeltangente. Dann ist offenbar $\tau t_1 t_2 t_3$ ein azyg. Quadrupel.

Es gibt 720 Tripel windschiefer Geraden $g_1 g_2 g_3$. Jede Doppeltangente τ ist mithin in 720 azyg. Quadrupeln enthalten. Die Zahl dieser Quadrupel beträgt demnach

$$\frac{28.720}{4} = 5040.$$

Mit den azyg. Quadrupeln ist also, wie ja auch aus dem vorhergehenden erhellt, die Zahl aller möglichen Quadrupel von Doppeltangenten erschöpft.

§ 3.

Von den drei Arten der Doppeltangenten-Quadrupel sollen jetzt die azyg. genauer betrachtet und die ihnen entsprechenden Systeme von Geraden ins Auge gefaßt werden.

Auf einer Fläche $F(\tau)$ seien $g_1 g_2 g_3$ irgend drei windschiefe Gerade. Die entsprechenden Doppeltangenten seien $t_1 t_2 t_3$. Dann ist nach dem vorigen das Quadrupel $\tau t_1 t_2 t_3$ azyg. Ist umgekehrt $t_1 t_2 t_3 t_4$ ein azyg. Quadrupel, so müssen auf einer Fläche $F(t_1)$ den 3 andern Doppeltangenten 3 windschiefe Gerade $g_2 g_3 g_4$ entsprechen, da t_1 mit jedem aus den andern 3 Doppeltangenten gebildeten Paare ein azyg. Tripel bildet.

Eine der 6 Geraden von $F(t_1)$, welche keine der 3 Geraden $g_2 g_3 g_4$ treffen, sei mit g_5 bezeichnet, und mit t_5 die zugehörige Doppeltangente. Auf der Fläche $F(t_5)$ müssen dann dem azyg. Quadrupel $t_1 t_2 t_3 t_4$ vier windschiefe Gerade entsprechen, da t_5 zu jedem Paare des Quadrupels azyg. ist. Auch die Richtigkeit der Umkehrung, daß je 4 windschiefen Geraden ein azyg. Quadrupel entspricht, ist leicht einzusehen.

Eine der 3 Geraden von $F(t_1)$, welche g_2, aber nicht g_3 und g_4 treffen, heiße g_6, die entsprechende Doppeltangente t_6. Dann bildet t_6 mit den t_2 enthaltenden Paaren des Quadrupels 3 syz., mit den 3 übrigen Paaren azyg. Tripel. Demnach müssen, wenn $h_1 h_2 h_3 h_4$ die dem Quadrupel entsprechenden Geraden von $F(t_6)$ sind, die 3 Geraden $h_1 h_3 h_4$ die Gerade h_2 schneiden, dagegen unter einander

windschief sein. Der Beweis für die Umkehrung, daß je 4 Geraden, von denen 3 windschief sind und die vierte schneiden, ein azyg. Quadrupel entspricht, bedarf keiner näheren Ausführung.

Mit g_7 möge eine der beiden Geraden bezeichnet werden, welche g_2 und g_3, jedoch nicht g_4 treffen (t_7 die zugehörige Doppeltangente). Dann bildet t_7 mit denjenigen 4 Paaren des Quadrupels, welche eine der beiden Doppeltangenten t_2 und t_3 enthalten, syz., mit den beiden anderen azyg. Tripel. Auf der Fläche $F(t_7)$ seien nun $k_1 k_2 k_3 k_4$ die dem Quadrupel entsprechenden Geraden. Dann muß jede der beiden Geraden k_2 und k_3 von jeder der beiden andern geschnitten werden, dagegen dürfen sich weder k_2 und k_3, noch k_1 und k_4 gegenseitig treffen. Dem azyg. Quadrupel entspricht also ein windschiefes Vierseit $k_1 k_2 k_4 k_3$. Auch die Umkehrung erweist sich leicht als richtig. Jedem windschiefen Vierseit einer Fläche $F(\tau)$ entspricht ein azyg. Quadrupel.

Endlich sei g_8 eine der 3 Geraden, welche alle 3 Geraden $g_2 g_3 g_4$ treffen. Die entsprechende Doppeltangente sei t_8, und die Geraden, die dem azyg. Quadrupel auf der Fläche $F(t_8)$ entsprechen, seien $l_1 l_2 l_3 l_4$. t_8 bildet mit den t_1 enthaltenden 3 Paaren des Quadrupels syz., mit den 3 andern azyg. Tripel. Demnach sind die Geraden $l_2 l_3 l_4$ windschief und werden von l_1 geschnitten: eine Konfiguration, auf die wir oben schon einmal geführt wurden.

Die Geradensysteme, welche den azyg. Quadrupeln entsprechen, sind also: vier windschiefe Gerade, drei windschiefe Gerade mit einer gemeinsamen Schneidenden und das windschiefe Vierseit. Andere Fälle sind, wie aus der Art der Ableitung sofort ersichtlich ist, nicht denkbar. Die bisherigen Erörterungen lassen sich demnach dahin zusammenfassen:

Es gibt 5040 azyg. Quadrupel von Doppeltangenten. Jede Doppeltangente τ kommt in 720 derartigen Quadrupeln vor. Auf einer Fläche $F(\tau)$ entsprechen den Quadrupeln, die τ enthalten, die 720 Tripel windschiefer Ge-

raden, und den Quadrupeln, die τ nicht enthalten, 1) die 1080 Quadrupel windschiefer Geraden, 2) die 2160 Gruppen von 4 Geraden, von denen 3 windschief sind und von der vierten geschnitten werden, und 3) die 1080 windschiefen Vierseite.

§ 4.

Im Anschluß an die azyg. Quadrupel mögen nunmehr die azyg. Systeme überhaupt untersucht werden. Dabei soll unter einem azyg. Systeme eine solche Gruppe von Doppeltangenten verstanden werden, in welcher je 3 untereinander azyg. sind.

Auf einer Fläche $F(\tau)$ seien $g_1 g_2 g_3 g_4$ irgend 4 windschiefe Gerade. Die entsprechenden Doppeltangenten seien $t_1 t_2 t_3 t_4$. Dann ist das Quintupel $\tau t_1 t_2 t_3 t_4$ zufolge unserer Erklärung azyg. Ist umgekehrt $t_1 t_2 t_3 t_4 t_5$ ein azyg. Quintupel, so müssen auf der Fläche $F(t_1)$ den 4 anderen Doppeltangenten 4 windschiefe Gerade $g_2 g_3 g_4 g_5$ entsprechen, da t_1 mit jedem aus den 4 andern Doppeltangenten gebildeten Paare ein azyg. Tripel bildet.

Eine der 3 Geraden von $F(t_1)$, welche keine der 4 Geraden $g_2 g_3 g_4 g_5$ treffen, sei mit g_6 bezeichnet (t_6 die zugehörige Doppeltangente). Auf der Fläche $F(t_6)$ müssen dann dem azyg. Quintupel 5 windschiefe Gerade entsprechen, da t_6 zu jedem Paare des Quintupels azyg. ist.

Hier ist nun zu beachten, daß die windschiefen Quintupel auf einer Fläche 3. Ordnung in zwei Klassen zerfallen, die als „Quintupel 1. und 2. Art" bezeichnet werden sollen: Ein Quintupel 1. Art ist ein solches, welches nur eine gemeinsame Schneidende besitzt, ein Quintupel 2. Art ein solches, welches deren zwei aufweist.

Angenommen, die Gerade g_6 der Fläche $F(t_1)$ sei so gewählt, daß $g_2 g_3 .. g_6$ ein windschiefes Quintupel 1. Art ist. g_7 sei die Gerade, welche zu allen 5 Geraden dieses Quintupels windschief ist (t_7 die zugehör. Doppelt.). Auf der Fläche $F(t_6)$ muß dann der Doppeltangente t_7 offenbar eine solche Gerade entsprechen, die keine der zu $t_1 t_2 .. t_5$

gehörigen windschiefen Geraden trifft. Dem azyg. Quintupel $t_1 t_2 .. t_5$ entspricht also auf der Fläche $F(t_6)$ ein windschiefes **Quintupel 1. Art.**

Zweitens werde angenommen, daß die Gerade g_6 von $F(t_1)$ mit $g_2 g_3 g_4 g_5$ ein windschiefes Quintupel 2. Art bilde. Dann seien g_7 und g_8 die beiden Geraden, welche nur g_6, aber keine der 4 andern Geraden des Quintupels treffen (t_7, t_8 d. zugehör. Doppelt.). Dann sind die Tripel von Doppeltangenten, welche aus den Paaren $t_6 t_7$ und $t_6 t_8$ entstehen, syz., die übrigen azyg. Folglich müssen, wenn auf der Fläche $F(t_6)$ die entsprechenden Geraden mit $h_1 h_2 \ldots h_8$ bezeichnet werden, die Geraden h_7 und h_8 von allen Geraden des Quintupels $h_1 h_2 .. h_5$ geschnitten werden. Dem azyg. Quintupel $t_1 t_2 .. t_5$ entspricht also in diesem Falle ein **windschiefes Quintupel 2. Art.**

Daß umgekehrt auch jedem windschiefen Quintupel 1. wie 2. Art ein azyg. Quintupel von Doppeltangenten entspricht, leuchtet sofort ein.

Analog der im vorigen Paragraphen für die azyg. Quadrupel angestellten Untersuchung findet man ferner, daß den azyg. Quintupeln auch die Systeme von 4 windschiefen und einer gemeinsamen schneidenden, sowie von 3 windschiefen und 2 gemeinsamen schneidenden Geraden entsprechen. Von einer eingehenden Begründung dieser Behauptungen darf abgesehen werden, da sich der Beweis ohne Schwierigkeit nach dem Muster der Entwicklungen des vorigen Paragraphen durchführen läßt.

§ 5.

Auf einer Fläche $F(\tau)$ sei $g_1 g_2 .. g_5$ ein windschiefes Quintupel 1. Art. Die entsprechenden Doppeltangenten seien $t_1 t_2 .. t_5$. Das Sextupel $\tau t_1 t_2 .. t_5$ enthält dann nur azyg. Tripel; entsprechend seiner Ableitung von einem windschiefen Quintupel 1. Art werde es als „azyg. Sextupel 1. Art" bezeichnet. g_6 sei diejenige Gerade der Fläche, welche das windschiefe Quintupel zu einem windschiefen Sextupel ergänzt. Die zugehörige Doppeltangente t_6 bildet dann mit dem azyg. Sextupel 1. Art ein azyg. Septupel.

Da die Existenz der zu dem Quintupel $g_1 g_2 \ldots g_5$ windschiefen geraden Linie g_6 für ein Quintupel 1. Art charakteristisch ist, so kann man das Vorhandensein der Doppeltangente t_6 auch zur Definition für das azyg. Sextupel 1. Art benutzen und sagen: Ein azyg. Sextupel 1. Art ist ein solches, welches durch eine und nur eine siebente Doppeltangente zu einem azyg. Septupel ergänzt werden kann. Diese siebente Doppeltangente möge als die dem Sextupel „zugeordnete" Doppeltangente bezeichnet werden.

Ist nun umgekehrt $t_1 t_2 \ldots t_6$ ein azyg. Sextupel 1. Art, so müssen auf der Fläche $F(t_1)$ den 5 Doppeltangenten $t_2 t_3 \ldots t_6$ da alle Tripel azyg. sind, 5 windschiefe Gerade $g_2 g_3 \ldots g_6$ entsprechen. Die der zugeordneten Doppeltangente t_7 entsprechende Gerade g_7 ist, wie leicht ersichtlich, zu $g_2 \ldots g_6$ ebenfalls windschief. Die 5 Geraden $g_2 \ldots g_6$ bilden demnach ein windschiefes Quintupel 1. Art.

Auf der Fläche $F(t_1)$ entspricht dem azyg. Sextupel 1. Art ein windschiefes Sextupel von Geraden, da t_7 mit jedem Paare des Sextupels azyg. Tripel bildet. Wenn umgekehrt auf einer Fläche $F(\tau)$ 6 windschiefe Gerade gegeben sind, so entspricht diesen, wie leicht zu sehen, ein azyg. Sextupel 1. Art mit der zugeordneten Doppeltangente τ.

Es sei nun g_2 diejenige Gerade von $F(t_1)$, welche nur die Gerade g_1 des Quintupels schneidet. Dieselbe trifft auch die Gerade g_7, da ein windschiefes Sextupel von keiner andern Geraden der Fläche nur einmal getroffen wird. Zu g_2 gehöre die Doppeltangente t_2. Man erkennt sofort, daß alle Tripel, welche die Paare $t_2 t_7$ und $t_7 t_8$ enthalten, syz. sind, alle übrigen aber azyg. Wenn nun auf der Fläche $F(t_2)$ den Doppeltangenten $t_1 t_7 \ldots t_7$ die Geraden $h_1 h_7 \ldots h_7$ entsprechen, so sind, dem eben gesagten zufolge, $h_1 h_3 h_4 h_5 h_6$ windschief und werden von h_2 und h_7 geschnitten. Dem azyg. Sextupel 1. Art entsprechen also in diesem Falle die 5 Windschiefen und eine der beiden gemeinsamen Schneidenden eines Quintupels 2. Art. Die zweite gemeinsame Schneidende entspricht der zugeordneten Doppeltangente des Sextupels. Der leichte Beweis der Umkehrung werde übergangen.

Ferner sei g_9 eine der beiden Geraden von $F(t_1)$, welche nur die beiden Geraden g_2 und g_3 des windschiefen Quintupels treffen. Dieselbe ist windschief zu g_7, da ein windschiefes Sextupel von keiner Geraden der Fläche dreimal getroffen wird. Eine einfache Ueberlegung zeigt, daß dann auf der Fläche $F(t_9)$ den 5 Doppeltangenten $t_1 t_4 t_5 t_6 t_7$ 5 windschiefe Gerade entsprechen, die von den zu t_2 und t_3 gehörigen Geraden geschnitten werden.

Mit g_{10} werde diejenige Gerade von $F(t_1)$ bezeichnet, welche die 4 Geraden $g_2 g_3 g_4 g_5$ des Quintupels schneidet und zu g_6 windschief ist. Dieselbe schneidet auch g_7, da ein windschiefes Sextupel von keiner andern Geraden der Fläche viermal getroffen wird. Ist t_{10} die entsprechende Doppeltangente, so gehören auf der Fläche $F(t_{10})$ zu $t_2 t_3 t_4 t_5 t_7$ 5 windschiefe Gerade, welche von den t_1 und t_6 entsprechenden Geraden getroffen werden.

Es macht keine Schwierigkeit, die gemeinsame Umkehrung der beiden letzten Fälle zu beweisen: Je 4 windschiefen Geraden mit ihren beiden gemeinsamen Schneidenden entspricht ein azyg. Sextupel 1. Art. Die demselben zugeordnete Doppeltangente entspricht derjenigen Geraden, welche die 4 Windschiefen zu einem windschiefen Quintupel 2. Art ergänzt. Man erkennt sofort, daß alle vorkommenden Tripel azyg. sind.

Die gemeinsame Schneidende des Quintupels $g_2 g_3 .. g_6$ heiße g_{11}. g_7 wird von g_{11} nicht geschnitten. Auf der Fläche $F(t_{11})$ entsprechen dann den Doppeltangenten $t_2 t_3 \ldots t_6$ wieder 5 windschiefe Gerade, die von t_1 und t_7 sämtlich geschnitten werden. Dem azyg. Sextupel entsprechen also in diesem Falle die 5 Windschiefen und die eine gemeinsame Schneidende eines Quintupels 2. Art, der zugeordneten Doppeltangente die zweite gemeinsame Schneidende desselben.

Die Resultate unserer Untersuchungen über die azyg. Sextupel 1. Art lassen sich in folgenden Satz zusammenfassen:

Es gibt 2016 azyg. Sextupel 1. Art. Jede Doppeltangente τ kommt in 432 derartigen Sextupeln vor. Auf einer Fläche $F(\tau)$ ent-

sprechen den Sextupeln, welche τ enthalten, die 432 windschiefen Quintupel 1. Art; dagegen den Sextupeln, die τ nicht enthalten, 1) die 72 windschiefen Sextupel, 2) die 432 Gruppen, bestehend aus den 5 Windschiefen und der einen gemeinsamen Schneidenden eines Quintupels 2. Art, und 3) die 1080 windschiefen Quadrupel mit den zugehörigen Paaren gemeinsamer Schneidenden.

§ 6.

Auf einer Fläche $F(\tau)$ sei $g_1 \dots g_5$ ein windschiefes Quintupel 2. Art; die entsprechenden Doppeltangenten seien $t_1 \dots t_5$. Das azyg. Sextupel $\tau t_1 t_2 .. t_5$ möge in diesem Falle als „azyg. Sextupel 2. Art" bezeichnet werden. Da eine charakteristische Eigenschaft eines windschiefen Quintupels 2. Art darin besteht, daß keine Gerade existiert, die zu allen 5 Geraden desselben windschief ist, so kann man definieren: Ein azyg. Sextupel 2. Art ist ein solches, welches durch keine siebente Doppeltangente zu einem azyg. Septupel ergänzt werden kann.

Wenn umgekehrt $t_1 t_2 \dots t_6$ ein azyg. Sextupel 2. Art ist, so müssen auf der Fläche $F(t_1)$ den 5 Doppeltangenten $t_2 \dots t_6$ 5 windschiefe Gerade $g_2 \dots g_6$ entsprechen, die durch keine Gerade zu einem windschiefen Sextupel ergänzt werden. Die 5 Geraden $g_2 \dots g_6$ bilden also ein windschiefes Quintupel 2. Art.

g_7 und g_8 seien die beiden Geraden, welche nur die Gerade g_2 des Quintupels schneiden. Dann sind alle Tripel, welche das Paar $t_2 t_7$ enthalten, mit Ausnahme von $t_2 t_7 t_8$, syz., dagegen alle Tripel, welche nur t_7, aber nicht t_2 enthalten, azyg. Mithin entspricht auf der Fläche $F(t_7)$ den 5 Doppeltangenten $t_1 t_3 t_4 t_5 t_6$ ein windschiefes Quintupel, welches von der zu t_2 gehörigen Geraden 5 mal getroffen wird; die Gerade, welche t_8 entspricht, ist zu der gemeinsamen Schneidenden jenes Quintupels und zu den Geraden des Quintupels selber windschief. Dem azyg. Sextupel der 2. Art entsprechen demnach die 5 Windschiefen und die gemeinsame

Schneidende eines Quintupels 1. Art. Es leuchtet unmittelbar ein, daß auch umgekehrt jedem Quintupel 1. Art mit seiner gemeinsamen Schneidenden ein azyg. Sextupel entsprechen muß, da jedes in demselben enthaltene Tripel azyg. ist. Daß dasselbe 2. Art ist, ergibt sich indirekt aus dem Schlußsatze des vorigen Paragraphen.

Es sei ferner g_9 eine der beiden Geraden, welche nur die 3 Geraden $g_2 g_3 g_4$ des windschiefen Quintupels 2. Art schneiden, und t_9 die entsprechende Doppeltangente. Dann zerfällt das azyg. Sextupel 2. Art in 2 Gruppen $t_1 t_5 t_6$ und $t_2 t_3 t_4$, welche zu t_9 in folgender Beziehung stehen: Jedes Paar aus einer Gruppe bildet mit t_9 ein azyg., jedes Paar aus beiden Gruppen ein syz. Tripel (z. B. $t_9 t_2 t_3$ azyg., $t_9 t_2 t_5$ syz.). Jeder dieser beiden Gruppen entsprechen demnach auf der Fläche $F(t_9)$ 3 windschiefe Gerade, und die Windschiefen der einen Gruppe werden von denen der andern Gruppe geschnitten. Mit andern Worten: Dem azyg. Sextupel 2. Art entspricht eine Doppeldrei. Die Umkehrung läßt sich ebenso wie im vorigen Falle mit Benutzung der Ergebnisse des vorigen Paragraphen beweisen.

Endlich mögen die beiden gemeinsamen Schneidenden des Quintupels mit g_{10} und g_{11} bezeichnet werden. Dann sind alle Tripel, welche das Paar $t_{10} t_1$ enthalten, mit Ausnahme von $t_{10} t_{11} t_1$, syz., dagegen alle Tripel, welche nur t_{10}, aber nicht t_1 enthalten, azyg. Mithin entspricht auf der Fläche $F(t_{10})$ den 5 Doppeltangenten $t_2 \ldots t_6$ ein windschiefes Quintupel, welches die der Doppeltangente t_1 entsprechende Gerade zur gemeinsamen Schneidenden hat. Die Gerade, welche t_{11} entspricht, schneidet weder die 5 Windschiefen noch ihre gemeinsame Schneidende. Dem azyg. Sextupel 2. Art entsprechen also die 5 Windschiefen und die gemeinsame Schneidende eines Quintupels 1. Art.

Demnach kann man zusammenfassend sagen:

Es gibt 1008 azyg. Sextupel 2. Art. Jede Doppeltangente τ kommt in 216 derartigen Sextupeln vor. Auf einer Fläche $F(\tau)$ entsprechen den Sextupeln, welche τ enthalten, die 216 windschiefen Quintupel 2. Art; dagegen den Sextupeln,

die τ nicht enthalten, die 432 windschiefen Quintupel 1. Art mit ihren gemeinsamen Schneidenden und die 360 Doppeldreien.

Da die 6 Geraden einer Doppeldrei einem einschaligen Hyperboloide angehören, und die geraden Linien einer Fläche 2. Ordnung von jedem beliebigen Punkte aus auf eine Ebene als Tangenten eines Kegelschnitts projiziert werden, so bildet jedes azyg. Sextupel 2. Art ein Brianchonsches Sechsseit (Hesse, a. a. O., S. 324).

Für die Flächen 3. Ordnung ergeben sich demnach die beiden Sätze:

1. Legt man durch einen beliebigen Punkt P einer Fläche 3. Ordnung, der nicht in einer Geraden der Fläche liegt, und durch die 5 Geraden eines windschiefen Quintupels 1. Art 5 Ebenen, so wird der von diesen eingehüllte Kegel 2. Ordnung auch von der durch P und die gemeinsame Schneidende gelegten Ebene berührt.

2. Legt man durch P und durch die 5 Geraden eines windschiefen Quintupels 2. Art 5 Ebenen, so wird der von diesen eingehüllte Kegel 2. Ordnung auch von der Tangentialebene im Punkte P berührt.

§ 7.

Daß azyg. Septupel existieren, ist schon im § 5 erwähnt worden. Um ein solches zu erhalten, muß man von 6 windschiefen Geraden einer Fläche $F(\tau)$ ausgehen; die 6 entsprechenden Doppeltangenten bilden mit τ offenbar ein azyg. Septupel.

Wenn umgekehrt $t_1 t_2 \dots t_7$ ein azyg. Septupel ist, so muß, weil alle Tripel azyg. sind, auf einer Fläche $F(t_1)$ den 6 andern Doppeltangenten ein windschiefes Sextupel $g_2 \dots g_7$ entsprechen.

Nimmt man von dem azyg. Septupel eine Doppeltangente weg, so bleibt ein azyg. Sextupel übrig; dasselbe ist 1. Art, weil nur solche in azyg. Septupeln enthalten sind. Nimmt man dagegen von dem azyg. Septupel 2 Doppeltangenten weg, so bleibt ein azyg. Quintupel übrig, welches stets durch eine, aber auch nur durch eine andere Doppeltangente

zu einem azyg. Sextupel 2. Art ergänzt werden kann. Werden z. B. t_6 und t_7 weggelassen, so bildet dafür diejenige Doppeltangente, deren entsprechende Gerade das Quadrupel $g_2 \dots g_5$ zu einem windschiefen Quintupel 2. Art ergänzt, mit $t_1 t_2 \dots t_5$ ein azyg. Sextupel 2. Art. Wird t_1 und eine der andern Doppeltangenten, etwa t_2, weggelassen, so füge man zu den übrigbleibenden diejenige Doppeltangente hinzu, welche der gemeinsamen Schneidenden des windschiefen Quintupels 1. Art $g_3 g_4 \dots g_7$ entspricht; das entstehende azyg. Sextupel ist wiederum von der 2. Art.

Es sei g_8 diejenige Gerade von $F(t_1)$, welche alle Gerade des windschiefen Sextupels $g_2 \dots g_7$ mit Ausnahme von g_7 schneidet. Dann sind alle Tripel, welche die Paare $t_1 t_8$ und $t_7 t_8$ enthalten, ausgenommen $t_1 t_7 t_8$, syz., alle andern azyg. Auf der Fläche $F(t_8)$ entsprechen also den 5 Doppeltangenten $t_2 \dots t_6$ 5 windschiefe Gerade, welche von den t_1 und t_7 entsprechenden Geraden geschnitten werden. Dem azyg. Sextupel entspricht demnach ein windschiefes Quintupel 2. Art mit seinen beiden gemeinsamen Schneidenden. Daß umgekehrt jedem windschiefen Quintupel 2. Art und seinen beiden Schneidenden ein azyg. Septupel entsprechen muß, ist ohne weiteres klar; denn alle Tripel sind azyg.

Ferner bedeute g_9 diejenige Gerade von $F(t_1)$, welche von dem windschiefen Sextupel nur die Geraden g_2 und g_3 trifft. Dann ist leicht zu sehen, daß alle Tripel, welche die Paare $t_2 t_9$ und $t_3 t_9$ enthalten, $t_2 t_3 t_9$ ausgenommen, syz., alle andern azyg sind. Dem azyg. Septupel entspricht also, wie im vorigen Falle, ein windschiefes Quintupel 2. Art mit seinen gemeinsamen Schneidenden.

Wir erhalten also das Resultat:

Es gibt 288 azyg. Septupel. Jede Doppeltangente τ kommt in 72 Septupeln vor. Auf einer Fläche $F(\tau)$ entsprechen den Septupeln, die τ enthalten, die 72 windschiefen Sextupel und den Septupeln, die τ nicht enthalten, die 216 windschiefen Quintupel 2. Art mit ihren beiden gemeinsamen Schneidenden.

Azyg. Systeme von mehr als 7 Doppeltangenten gibt es nicht. Wenn $t_1 t_2 \ldots t_n$ ein azyg. System von n Doppeltangenten bezeichnet, so müssen auf einer Fläche $F(t_1)$ den $n-1$ andern Doppeltangenten $n-1$ windschiefe Gerade entsprechen. Da nun die höchste Zahl windschiefer Geraden einer Fläche 3. Ordnung 6 beträgt, so kann n nicht grösser als 7 sein.

Die azyg. Septupel haben für die Theorie der Kurven 4. Ordnung durch den bekannten Aronholdschen Satz eine besondere Bedeutung erlangt. Aronhold (Berl. Mon.-Ber., 1864) hat bewiesen, daß 7 gerade Linien in einer Ebene stets eine und nur eine ebene Kurve 4. Ordnung bestimmen, für welche sie ein azyg. Septupel von Doppeltangenten bilden. Die Existenz einer solchen Kurve läßt sich auch mittels einer Geiserschen Hülfsfläche 3. Ordnung leicht nachweisen.

Angenommen, in einer Ebene $\mathfrak{E}$ seien irgend 7 gerade Linien $t_1 t_2 \ldots t_7$ gegeben. Man wähle außerhalb $\mathfrak{E}$ einen beliebigen Punkt P und lege durch diesen und je eine der 7 Geraden die 7 Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_7$. In zwei dieser Ebenen, z. B. ε_1 und ε_2, nehme man zwei gerade Linien g_1 und g_2 beliebig, aber zu einander windschief, an. Die Schnittpunkte von g_1 mit den 5 übrigen Ebenen $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots \varepsilon_7$ seien P_{13}, $P_{14}, \ldots P_{17}$, diejenigen von g_2 mit diesen Ebenen $P_{23}, P_{24} \ldots P_{27}$. Die 5 unter einander windschiefen Verbindungslinien von P_{13} und P_{23}, P_{14} und $P_{24}, \ldots P_{17}$ und P_{27} seien mit $g_3, g_4, \ldots g_7$ bezeichnet. Auf einer dieser 5 Geraden, z. B. g_7, nehme man irgend 2 von P_{17} und P_{27} verschiedene Punkte Q und R an. Dann kann man eine und nur eine Fläche 3. Ordnung F_3 konstruieren, welcher die 3 Punkte P, Q, R und die 4 Geraden $g_3 g_4 g_5 g_6$ angehören (Reye, Geom. d. Lage, 2. Aufl., 2. Abteil., S. 223). Da g_1 und g_2 mit dieser Fläche je 4 Punkte gemein haben, so liegen sie ganz auf derselben. Die Punkte P_{17} und P_{27} gehören also ebenfalls der Fläche an. Demnach hat auch g_7 4 und damit alle Punkte mit F_3 gemein. Die 7 Geraden g_1, $g_2 \ldots g_7$ bilden daher ein windschiefes Quintupel der Fläche mit 2 gemeinsamen Schneidenden. Projiziert man nun die Fläche F_3 von P aus auf die Ebene $\mathfrak{E}$, so ergibt

sich als Durchschnitt des Tangentialkegels eine Kurve 4. Ordnung, für welche die geraden Linien $t_1, t_2, \ldots t_7$ ein azyg. Septupel von Doppeltangenten bilden.

§ 8.

Wir wenden uns jetzt der Untersuchung solcher Gruppen von Doppeltangenten zu, welche aus Paaren von der Eigenschaft bestehen, daß je 2 Paare des Systems ein syz. Quadrupel bilden. Ist die Anzahl der Paare n, so soll ein solches System kurzweg als ein „n-paariges“ bezeichnet werden. Die 2-paarigen Systeme sind die syz. Quadrupel selbst.

n-paarige Systeme, in denen $n > 6$ ist, gibt es nicht. Sind $t_1 t_1', t_2 t_2', \ldots t_n t_n'$ die $2n$ Doppeltangenten eines n-paarigen Systems, so müssen, weil $t_n t_n'$ mit jedem andern Paare des Systems ein syz. Quadrupel bildet, auf der Fläche $F(t_n)$ den $n-1$ ersten Paaren $n-1$ Paare sich schneidender Geraden entsprechen, die sämtlich durch die der Doppeltangente t_n' entsprechende Gerade zu Dreiecken ergänzt werden. Da nun die Zahl der Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite nicht größer als 5 ist, so kann n die Zahl 6 nicht übersteigen.

Die Existenz 6-paariger Systeme folgt aus der Existenz von 5 Dreiecken mit einer gemeinsamen Seite auf einer Fläche $F(\tau)$. Die gemeinsame Seite sei g, die übrigen Seitenpaare der Dreiecke seien $g_1 g_1', g_2 g_2', \ldots g_5 g_5'$ (die zugehörigen Doppeltangenten $t t_1 t_1' \ldots t_5 t_5'$). Es ist leicht ersichtlich, daß 1.) je zwei der Paare $t_1 t_1', \ldots t_5 t_5'$ und 2.) jedes derselben mit $t\tau$ ein syz. Quadrupel bildet. Die 12 Doppeltangenten $t\tau, t_1 t_1', t_2 t_2', \ldots t_5 t_5'$ bilden also in der Tat ein 6-paariges System. Ein solches System möge auch als eine „Steinersche Gruppe“ bezeichnet werden (s. Steiner, Crelles Journ., Bd. 49, S. 266, die „Gruppen G“).

Es sei $t_1 t_1', t_2 t_2', \ldots t_6 t_6'$ ein 6-paariges System. Auf der Fläche $F(t_1)$ entsprechen demselben, wie oben für den Fall von n Paaren gezeigt, 5 Dreiecke $g_1' g_2 g_2', g_1' g_3 g_3' \ldots g_1' g_6 g_6'$ mit der gemeinsamen Seite g_1'. Jede der 16 übrigen, zu g_1' windschiefen Geraden muß in jedem Dreieck eine Gerade

treffen. Angenommen, die Gerade g_7 schneide g'_2, g'_3, ... g'_6. Nimmt man dann aus irgend 2 der 5 Paare $t_2 t'_2$, ... $t_6 t'_6$ 2 solche Doppeltangenten, von deren entsprechenden Geraden die eine g_7 schneidet, die andere zu g_7 windschief ist, so bilden diese mit t_7 ein syz. Tripel (z. B. $t_7 t'_2 t_3$); desgleichen wird das Paar $t_7 t_1$ von t'_2, t'_3, ... t'_6 und das Paar $t_7 t'_1$ von t_2, t_3, ... t_6 zu syz. Tripeln ergänzt. Alle andern t_7 enthaltenden Tripel sind azyg. Demnach entsprechen auf der Fläche $F(t_7)$ den Doppeltangenten der Steinerschen Gruppe 2 Sextupel windschiefer Geraden

$$h_1 h_2 h_3 h_4 h_5 h_6$$
$$h'_1 h'_2 h'_3 h'_4 h'_5 h'_6,$$

die zusammen eine Schläflische Doppelsechs bilden. Wie leicht zu sehen, wird nämlich h_α ($\alpha = 1, 2, \ldots 6$) von den 5 Geraden h'_β ($\beta \gtrless \alpha$) getroffen, dagegen nicht von h'_α und den 5 Geraden h_β.

Ist umgekehrt

$$h_1 h_2 \ldots h_6$$
$$h'_1 h'_2 \ldots h'_6$$

irgend eine Schläflische Doppelsechs einer Fläche $F(\tau)$, so entspricht derselben eine Steinersche Gruppe von Doppeltangenten, weil je 2 Paare $h_\alpha h'_\beta$ und $h_\beta h'_\alpha$ ($\alpha \gtrless \beta$) ein Doppelzweiseit bilden, also einem syz. Quadrupel entsprechen.

Demnach ist das Resultat unserer Untersuchung:

Es gibt 63 Steinersche Gruppen oder 6-paarige Systeme (Steiner, a. a. O.). Jede Doppeltangente τ gehört 27 Gruppen an. Auf einer Fläche $F(\tau)$ entsprechen den Gruppen, die τ enthalten, die 27 Gruppen von je 5 Dreiecken mit einer gemeinsamen Seite; dagegen den Gruppen, die τ nicht enthalten, die 36 Schläflischen Doppelsechsen (Geiser, Crelles Journ. Bd. 72, S. 377).

§ 9.

Läßt man von einem 6-paarigen Systeme 3, 2 oder 1 Paar weg, so gelangt man zu einem 3-, 4- oder 5-paarigen

Systeme. Einem beliebigen 6-paarigen Systeme $t_\alpha t'_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots 6)$ entsprechen auf einer Fläche $F(t_1)$ 5 Paare sich schneidender Geraden $g_\beta g'_\beta$ $(\beta = 2, 3, \ldots 6)$, die von g'_1 zu 5 Dreiecken ergänzt werden. Dem 3-paarigen Systeme $t_1 t'_1$, $t_2 t'_2$, $t_3 t'_3$ entspricht demnach auf der Fläche $F(t_1)$ ein Doppelzweiseit $(g_2 g'_2, g_3 g'_3)$ nebst seiner Ergänzungsgeraden g'_1. Umgekehrt ist ohne weiteres klar, daß jedem Doppelzweiseit einer Fläche $F(\tau)$ mit seiner Ergänzenden 5 Doppeltangenten entsprechen, die mit τ ein 3-paariges System bilden.

Dem 3-paarigen Systeme $t_2 t'_2$, $t_3 t'_3$, $t_4 t'_4$ entsprechen auf einer Fläche $F(t_1)$ 3 Paare sich schneidender Geraden mit derselben Ergänzungsgeraden g'_1. Auch umgekehrt ist jeder solchen Gruppe von 6 Geraden ein 3-paariges System zugeordnet.

Ist τ eine in dem 6-paarigen Systeme $t_\alpha t'_\alpha$ nicht enthaltene Doppeltangente, so entspricht diesem Systeme auf der Fläche $F(\tau)$ eine Schläflische Doppelsechs

$$h_1 h_2 \ldots h_6$$
$$h'_1 h'_2 \ldots h'_6.$$

Dem 3-paarigen Systeme $t_1 t'_1 t_2 t'_2 t_3 t'_3$ entspricht daher eine Gruppe von 6 Geraden

$$h_1 h_2 h_3$$
$$h'_1 h'_2 h'_3$$

von der Beschaffenheit, daß jede Gerade von 2 andern getroffen wird (z. B. h_1 von h'_2 und h'_3), zu den 3 übrigen dagegen windschief ist. Eine solche Gruppe ist nichts anderes als ein windschiefes Sechsseit $h_1 h'_2 h_3 h'_1 h_2 h'_3$. Auf den Beweis für die Umkehrung braucht nicht näher eingegangen zu werden.

Völlig entsprechend gestaltet sich die Untersuchung der Gruppen von Geraden, welche den 4- oder 5-paarigen Systemen zugeordnet sind. Man kann daher die Ergebnisse zu folgendem Satze zusammenfassen:

Auf einer Fläche $F(\tau)$ entsprechen denjenigen 3- (4- oder 5-) paarigen Systemen, welche die Doppeltangente τ enthalten, die Gruppen von 2

(3 oder 4) Dreiecken mit einer gemeinsamen Seite; dagegen den Systemen, die τ nicht enthalten, 1. die Gruppen von je 3 (4 oder 5) Paaren sich schneidender Geraden, welche durch eine und dieselbe Gerade zu 3 (4 oder 5) Dreiecken ergänzt werden und 2. die Gruppen von 6 (8 oder 10) Geraden von der Beschaffenheit, daß jede von 2 (3 oder 4) andern getroffen wird und zu den übrigen windschief ist.

§ 10.

Wir kehren noch einmal zu den 6-paarigen Systemen oder Steinerschen Gruppen zurück.

Jede Seite eines Dreiecks $g_1 g_2 g_3$ einer Fläche $F(\tau)$ wird außer von den beiden andern Seiten noch von 4 Paaren sich schneidender Geraden getroffen. Den 10 Geraden, welche g_1 treffen, und der Geraden g_1 selbst entsprechen 11 Doppeltangenten, die mit τ eine Steinersche Gruppe bilden. Zu dem Dreieck $g_1 g_2 g_3$ gehören demnach 3 Steinersche Gruppen, welche ein syz. Quadrupel, bestehend aus τ und den dem Dreieck entsprechenden Doppeltangenten, gemein haben. Drei solche Steinersche Gruppen umfassen zusammen alle 28 Doppeltangenten. Auf der Fläche $F(t_1)$ entspricht dem syz. Tripel $\tau t_2 t_3$ ein Dreieck $h h_2 h_3$. Der zu g_1 gehörigen Steinerschen Gruppe entsprechen die 5 Dreiecke mit der gemeinsamen Seite h, den zu g_2 bezw. g_3 gehörigen Gruppen die Dreiecke mit den gemeinsamen Seiten h_3 bezw. h_2. Da die Vertauschung von τ und t_1 die Zusammensetzung der 3 Steinerschen Gruppen demnach nicht ändert, so gehört jedes syz. Quadrupel nur einem Tripel Steinerscher Gruppen an. Es gibt daher 315 derartige Tripel. Da jede Steinersche Gruppe 15 syz. Quadrupel enthält, so kommt sie in 15 Tripeln vor. Nach der Bezeichnung des Herrn Frobenius (Crelles Journ. Bd. 103, S. 152) sind je 2 Steinersche Gruppen mit einem gemeinsamen syz. Quadrupel „syz.“ Es existieren demnach $3.315 = 945$ Paare syz. Steinerscher Gruppen (Steiner, a. a. O., S. 268).

Jede Schläflische Doppelsechs enthält 20 Doppeldreien. Eine in der Doppelsechs

$$g_1 g_2 g_3 g_4 g_5 g_6$$
$$g'_1 g'_2 g'_3 g'_4 g'_5 g'_6$$

enthaltene Doppeldrei ist z. B. $(g_1 g_2 g_3,\ g'_4 g'_5 g'_6)$. Jede der 15 nicht zu der Doppelsechs gehörigen Geraden ist Ergänzungsgerade zu einem in der Doppelsechs enthaltenen Doppelzweiseit. Die Ergänzende des Doppelzweiseits $(g_\alpha g'_\beta,\ g_\beta g'_\alpha)$ sei mit $g_{\alpha\beta}$ bezeichnet. Sind $g_{\alpha\beta}$ und $g_{\gamma\delta}$ 2 solche Gerade dieser Art, in deren Indices 4 verschiedene Ziffern vorkommen, so müssen sie sich schneiden. Denn $g_{\alpha\beta}$ bildet mit g_α und g'_β ein Dreieck. $g_{\gamma\delta}$ muß eine Seite dieses Dreiecks treffen. Nun ist aber $g_{\gamma\delta}$ zu g_α und g'_β windschief; mithin schneiden sich $g_{\alpha\beta}$ und $g_{\gamma\delta}$. Auf ähnliche Weise erkennt man, daß 2 Gerade $g_{\alpha\beta}$ und $g_{\beta\gamma}$, deren Indices eine Ziffer gemein haben, windschief sind.

Unter den 15 Geraden $g_{\alpha\beta}$ gibt es 6, welche mit der oben genannten Doppeldrei eine Doppelsechs bilden. Nämlich die Geraden $g_{56} g_{46} g_{45}$ bilden mit $g_1 g_2 g_3$ und die Geraden $g_{23} g_{31} g_{12}$ mit $g'_4 g'_5 g'_6$ je ein windschiefes Sextupel, und diese beiden Sextupel ergeben die Doppelsechs

$$g_1 g_2 g_3 g_{56} g_{64} g_{45}$$
$$g_{23} g_{31} g_{12} g'_4 g'_5 g'_6.$$

Es gibt also Paare von Doppelsechsen mit einer gemeinsamen Doppeldrei. Da jede Doppelsechs 20 verschiedene Doppeldreien enthält, so kommt sie in 20 derartigen Paaren vor. Die Anzahl dieser Paare ist also $\frac{36.20}{2} = 360$.

Für die Doppeltangenten folgt daraus: Sondert man von den 28 Doppeltangenten eine beliebige, τ, ab, so gibt es unter den übrigen 360 Paare Steinerscher Gruppen, die ein azyg. Sextupel 2. Art gemein haben. Zwei solche Gruppen sollen (nach Frobenius, a. a. O.) „azyg." heißen. Zu jeder Doppeltangente τ gehören 360 Paare azyg. Gruppen, die τ nicht enthalten, und jedes Paar um-

faßt 18 Doppeltangenten; also ist die Zahl dieser Paare $\frac{360.28}{10} = 1008$.

Da die 63 Steinerschen Gruppen sich überhaupt zu $63.31 = 1953 = 945 + 1008$ Paaren zusammenfassen lassen, so müssen irgend 2 Gruppen entweder syz. oder azyg. sein (Steiner, a. a. O., S. 268).

Durch Uebertragung des letzten Resultats auf die Flächen 3. Ordnung ergibt sich der Satz: Zwei Doppelsechsen haben mit einander entweder eine Doppeldrei oder ein Doppelzweiseit gemein. Da nun jede der 36 Doppelsechsen mit 20 andern je eine Doppeldrei gemein hat, so muß sie mit den 15 übrigen je ein Doppelzweiseit gemein haben. Hiernach ist die Bemerkung des Herrn Geiser (Crelles Journ. Bd. 72, S. 377), daß zu jeder Doppelsechs 15 andere gehören, die mit ihr ein „windschiefes Vierseit“ gemein haben, zu berichtigen.

§ 11.

Der im vorigen Paragraphen angeführte Fall, daß 2 Doppelsechsen eine Doppeldrei gemein haben, soll zunächst weiter verfolgt werden. Es seien (unter Beibehaltung der Bezeichnungen des § 10)

$$g_1 g_2 g_3 g_4 g_5 g_6$$
$$g_1' g_2' g_3' g_4' g_5' g_6'$$

und

$$g_1 g_2 g_3 g_{56} g_{64} g_{45}$$
$$g_{23} g_{31} g_{12} g_4' g_5' g_6'$$

2 Doppelsechsen mit einer gemeinsamen Doppeldrei. Die 12 Geraden der beiden Doppelsechsen, die nicht dieser Doppeldrei angehören, bilden ebenfalls eine Doppelsechs

$$g_{23} g_{31} g_{12} g_4 g_5 g_6$$
$$g_1' g_2' g_3' g_{56} g_{64} g_{45}.$$

Die 18 in Rede stehenden Geraden zerfallen also in 3 Doppeldreien, von denen je 2 eine Doppelsechs bilden. Drei

solche Doppeldreien sollen als „konjugiert“ bezeichnet werden.

Es gibt auf der Fläche 9 gerade Linien, welche diesen konjugierten Doppeldreien nicht angehören, nämlich

$$g_{14}\, g_{25}\, g_{36}$$
$$g_{26}\, g_{34}\, g_{15}$$
$$g_{35}\, g_{16}\, g_{24}.$$

Nach den in § 10 erörterten Eigenschaften der Linien $g_{\alpha\beta}$ liegen von diesen 9 Geraden je 3, deren Symbole in derselben Zeile oder Spalte stehen, in einer Ebene. Die 9 Geraden bilden also ein Steinersches Triederpaar.

Die den 27 Geraden g_α, g'_α und $g_{\alpha\beta}$ der Fläche $F(\tau)$ entsprechenden Doppeltangenten seien mit t_α, t'_α und $t_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 6)$ bezeichnet. Auf einer Fläche $F(t_{14})$ seien die entsprechenden geraden Linien mit h_α, h'_α, $h_{\alpha\beta}$ und die der Doppeltangente τ entsprechende Gerade mit h bezeichnet. Der Steinerschen Gruppe $t_1 t'_1, t_2 t'_2, \ldots t_6 t'_6$ entspricht auf dieser Fläche eine Doppelsechs.

Dem azyg. Sextupel 1. Art $t_1 t_2 \ldots t_6$ entsprechen 4 windschiefe Gerade $h_2 h_3 h_5 h_6$, geschnitten von h_1 und h_4. Mithin heißt die Doppelsechs

$$h_1\, h'_2\, h'_3\, h_4\, h'_5\, h'_6$$
$$h'_1\, h_2\, h_3\, h'_4\, h_5\, h_6.$$

Ebenso entspricht der zweiten Steinerschen Gruppe $t_1 t_{23}$, $t_2 t_{31}$, $t_3 t_{12}$, $t_{56} t'_4$, $t_{64} t'_5$, $t_{45} t'_6$ die Doppelsechs

$$h_1\, h_{31}\, h_{12}\, h_{56}\, h'_5\, h'_6$$
$$h_{23}\, h_2\, h_3\, h'_4\, h_{64}\, h_{45}.$$

Die 18 Geraden dieser beiden Doppelsechsen zerfallen wiederum in 3 konjugierte Doppeldreien $(h_1 h'_5 h'_6,\ h_2 h_3 h'_4)$, $(h'_1 h_5 h_6,\ h'_2 h'_3 h_4)$ und $(h_{23} h_{64} h_{45},\ h_{31} h_{12} h_{56})$. Die übrigen 9 Geraden bilden wieder, wie durch Aufsuchung der syz. Tripel leicht nachgewiesen werden kann, ein Triederpaar

$$h \quad h_{25}\, h_{36}$$
$$h_{26}\, h_{24}\, h_{16}$$
$$h_{35}\, h_{15}\, h_{34}.$$

Die 10 Doppeltangenten, welche übrig bleiben, wenn man aus der Gesamtheit aller Doppeltangenten 2 azyg. Steinersche Gruppen aussondert, mögen als ein „System T“ bezeichnet werden. Das bisherige Ergebnis läßt sich dann folgendermaßen ausdrücken:

Auf jeder Fläche, die zu einer der 10 Doppeltangenten eines Systems T gehört, entsprechen den beiden azyg. Steinerschen Gruppen 2 Doppelsechsen mit gemeinsamer Doppeldrei oder, anders ausgedrückt, 3 konjugierte Doppeldreien; den 9 übrigen Doppeltangenten des Systems T entspricht stets ein Steinersches Triederpaar.

Es sei nun umgekehrt auf einer Fläche $F(\tau)$ ein Steinersches Triederpaar

$$\begin{matrix} g_{11}\, g_{12}\, g_{13} \\ g_{21}\, g_{22}\, g_{23} \\ g_{31}\, g_{32}\, g_{33} \end{matrix}$$

gegeben. Die entsprechenden Doppeltangenten seien $t_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$. Die 18 übrigen Geraden der Fläche zerfallen dann in 2 andere Triederpaare

$$\begin{matrix} h_{11}\, h_{12}\, h_{13} \\ h_{21}\, h_{22}\, h_{23} \\ h_{31}\, h_{32}\, h_{33} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} k_{11}\, k_{12}\, k_{13} \\ k_{21}\, k_{22}\, k_{23} \\ k_{31}\, k_{32}\, k_{33}. \end{matrix}$$

Jede Gerade des zweiten Triederpaares $(k_{\alpha\beta})$ muß in jedem Dreieck des ersten $(h_{\alpha\beta})$ eine Seite schneiden, also irgend 3 windschiefe Gerade desselben treffen. Nun enthält dieses erste Triederpaar $(h_{\alpha\beta})$ nur 6 Tripel windschiefer Geraden. Es muß also in dem 2. Triederpaare $(k_{\alpha\beta})$ 2 Gerade geben, die dasselbe windschiefe Tripel von $(h_{\alpha\beta})$ treffen. Das können auch nur 2 windschiefe Gerade von $(k_{\alpha\beta})$ sein. Die Bezeichnung der Geraden sei nun so gewählt, daß die 3 windschiefen Geraden $h_{11}\, h_{22}\, h_{33}$ von k_{11} und k_{22} getroffen werden. Dann muß auch die zu diesen beiden windschiefe Gerade k_{33} dieselben 3 Geraden von $(h_{\alpha\beta})$ schneiden, da ja auch jede von diesen 3 windschiefe Gerade von $(k_{\alpha\beta})$ treffen muß. Die 6 Geraden $(h_{11}\, h_{22}\, h_{33},\ k_{11}\, k_{22}\, k_{33})$ bilden also eine Doppeldrei.

Unter den übrigen 6 Geraden von $(h_{\alpha\beta})$ gibt es nur noch die beiden windschiefen Tripel $h_{12}\,h_{23}\,h_{31}$ und $h_{13}\,h_{21}\,h_{32}$. Von den 6 übrigen Geraden $k_{\alpha\beta}$ muß jede eins dieser Tripel schneiden. Das ist nur in der Art möglich, daß jedes der beiden übrigen windschiefen Tripel von $(k_{\alpha\beta})$ mit einem der beiden Tripel von $(h_{\alpha\beta})$ eine Doppeldrei bildet. Angenommen, die Bezeichnung der Geraden sei so gewählt, daß eine dieser beiden Doppeldreien $(h_{12}h_{23}h_{31},\ k_{12}k_{23}k_{31})$ sei. Dann sieht man leicht, daß die 12 Geraden

$$h_{11}\,h_{22}\,h_{33}\,k_{23}\,k_{31}\,k_{12}$$
$$h_{23}\,h_{31}\,h_{12}\,k_{11}\,k_{22}\,k_{33}$$

eine Doppelsechs bilden. Die 3 Doppeldreien sind also einander konjugiert. Demnach bilden die 18 entsprechenden Doppeltangenten 2 azyg. Steinersche Gruppen und die 9 Doppeltangenten $t_{\alpha\beta}$ mit τ ein System T.

Diese Betrachtung führt zu einer neuen, von den azyg. Steinerschen Gruppen unabhängigen Erklärung der Systeme T: Ein System T besteht aus den 9 Doppeltangenten, welche einem Steinerschen Triederpaare einer Fläche $F(\tau)$ entsprechen, und der Doppeltangente τ. Daß τ keine Ausnahmestellung in dem Systeme einnimmt, daß vielmehr dem Systeme T auf jeder Fläche, die zu einer seiner 10 Doppeltangenten gehört, ebenfalls ein Triederpaar entspricht, ist schon gezeigt worden. Ein Steinersches Triederpaar ist dadurch gekennzeichnet, daß sich seine 9 Geraden auf 2 Arten in 3 Gruppen von je 3 in einer Ebene liegenden Geraden teilen lassen. Demnach kann man auch folgende von der Benutzung einer Hülfsfläche 3. Ordnung unabhängige Definition der Systeme T geben: 10 Doppeltangenten bilden ein System T, wenn sich je 9 von ihnen auf 2 Arten in 3 syz. Tripel teilen lassen, welche von der 10. Doppeltangente zu syz. Quadrupeln ergänzt werden.

Das Ziel der gegenwärtigen Untersuchung ist nun, festzustellen, was für Konfigurationen einem Systeme T und den beiden zugehörigen azyg. Steinerschen Gruppen auf einer Fläche entsprechen, die zu einer nicht in T enthaltenen Doppeltangente gehört. Zu diesem Zwecke werde wieder

dieselbe Bezeichnung der Geraden auf der Fläche $F(\tau)$ wie im Anfange dieses Paragraphen zu Grunde gelegt. Auf der Fläche $F(t_1)$ mögen die den Doppeltangenten t_α, t'_α und $t_{\alpha\beta}$ entsprechenden Geraden mit l_α, l'_α und $l_{\alpha\beta}$ und die der Doppeltangente τ entsprechende Gerade mit l bezeichnet werden. Dann entsprechen der 1. Steinerschen Gruppe $t_\alpha t'_\alpha (\alpha = 1,2,\ldots 6)$ 5 Dreiecke mit der gemeinsamen Seite $l'_1 : l'_1 l_2 l'_2, l'_1 l_3 l'_3, \ldots l'_1 l_6 l'_6$. Ebenso entsprechen der 2. Steinerschen Gruppe $(t_1 t_{23}, t_2 t_{31}, t_3 t_{12}, t_{56} t'_4, t_{64} t'_5, t_{45} t'_6)$ die 5 Dreiecke mit der gemeinsamen Seite $l_{23} : l_{23} l_2 l_{31}, l_{23} l_3 l_{12}, \ldots l_{23} l_{45} l'_6$. Dem ersten der 3 in den beiden Steinerschen Gruppen enthaltenen azyg. Sextupel 2. Art $t_1 t_2 t_3 t'_4 t'_5 t'_6$ entsprechen demnach die 5 Windschiefen $l_2 l_3 l'_4 l'_5 l'_6$ eines Quintupels 2. Art mit den beiden gemeinsamen Schneidenden l'_1 und l_{23}. Dem zweiten azyg. Sextupel 2. Art $t'_1 t'_2 t'_3 t_4 t_5 t_6$ entspricht das windschiefe Quintupel 1. Art $l'_2 l'_3 l_4 l_5 l_6$ und dessen gemeinsame Schneidende l'_1. Ebenso entspricht dem dritten Sextupel $t_{23} t_{31} t_{12} t_{56} t_{64} t_{45}$ ein windschiefes Quintupel 1. Art mit der Schneidenden l_{23}. Zusammenfassend kann man sagen: Den drei azyg. Sextupeln 2. Art entsprechen die beiden windschiefen Geraden l'_1 und l_{23} und die 15 Geraden, welche je eine von diesen oder beide treffen. Man sieht nun sofort, daß dem Systeme T diejenigen 10 Geraden entsprechen müssen, welche weder l'_1 noch l_{23} schneiden.

Diese 10 Geraden heißen (entsprechend den Geraden von $F(\tau)$ angeordnet):

$$l_{14}\, l_{25}\, l_{36}$$
$$l_{26}\, l_{34}\, l_{15}$$
$$l_{35}\, l_{16}\, l_{24}$$

und l. τ bildet mit je 3 Doppeltangenten, denen in dem Triederpaare von $F(\tau)$ ein Dreieck zugeordnet ist, ein syz. Quadrupel. $l\, l_{14} l_{25} l_{36}$ und $l\, l_{14} l_{26} l_{35}$ sind also Doppelzweiseite. Da das Tripel $\tau t_1 t_{14}$ syz. ist, so sind $l\, l_{14}$, $l_{25} l_{36}$ und $l_{26} l_{35}$ die in den Doppelzweiseiten enthaltenen Paare sich schneidender Geraden. Die 4 übrigen Geraden entsprechen einem azyg. Quadrupel. l_{15} und l_{16} treffen sich nicht, da $t_1 t_{15} t_{16}$ 3 azyg. Doppeltangenten sind. Da g_{15} sowohl g_1 als auch g_{24} schneidet,

so ist das Tripel $t_1 t_{15} t_{24}$ azyg., also l_{24} windschief zu l_{15}; ebenso ist l_{24} windschief zu l_{16} und l_{34} windschief zu l_{15} und l_{16}. Die 4 Geraden $l_{15} l_{16} l_{24} l_{34}$ bilden also ein windschiefes Quadrupel. Man kann sich leicht überzeugen, daß von den 6 andern Geraden, die noch dem System T angehören, jede 2 Gerade dieses Quadrupels trifft, und zwar so, daß je eins der 3 Paare sich schneidender Geraden alle 4 Geraden des Quadrupels schneidet. Dem Systeme T entsprechen also auf der Fläche $F(t_1)$ ein windschiefes Quadrupel und die 6 Geraden, welche je 2 Gerade desselben treffen.

Es sei nun umgekehrt auf einer Fläche $F(\tau)$ ein windschiefes Quadrupel $g_1 g_2 g_3 g_4$ mit den 6 Geraden $g_{\alpha\beta}$, deren jede 2 Gerade des Quadrupels trifft, gegeben ($g_{\alpha\beta}$ schneide g_α und g_β). Dann sind die Quadrupel $t_1 t_{12} t_{23} t_3$, $t_1 t_{13} t_{34} t_4$ und $t_1 t_{14} t_{24} t_2$ syz., weil ihnen auf $F(\tau)$ Doppelzweiseite zugehören. Auf einer Fläche $F(t_1)$ entsprechen also den 9 übrigen Doppeltangenten 3 Dreiecke $h_{12} h_{23} h_3$, $h_{13} h_{34} h_4$ und $h_{14} h_{24} h_2$, welche, wie man leicht sieht, das Triederpaar

$$\begin{matrix} h_{12}\, h_{23}\, h_3 \\ h_{24}\, h_2\, h_{14} \\ h_4\, h_{13}\, h_{34} \end{matrix}$$

zusammensetzen. Jedem windschiefen Quadrupel mit den 6 Geraden, von denen jede 2 Gerade des Quadrupels trifft, entspricht also ein System T.

Es gibt auf jeder Fläche 3. Ordnung 1080 windschiefe Quadrupel. Fügt man aber zu einem Quadrupel immer die 6 Geraden hinzu, welche dasselbe 2 mal schneiden, so lassen sich aus diesen 10 Geraden außer dem ursprünglichen noch 4 andere windschiefe Quadrupel herausgreifen. Die 6 übrig bleibenden Geraden sind dann jedesmal für das betreffende Quadrupel die doppelt schneidenden. In unserm Falle sind die 4 andern windschiefen Quadrupel: $g_1 g_{23} g_{24} g_{34}$, $g_2 g_{13} g_{14} g_{34}$, $g_3 g_{12} g_{14} g_{24}$ und $g_4 g_{12} g_{13} g_{23}$. Daß keine andern windschiefen Quadrupel unter den 10 Geraden enthalten sind, ist leicht ersichtlich. Demnach gibt es $\frac{1080}{5} = 216$ verschiedene Gruppen von 10 Geraden, von der Art, daß jede Gruppe

5 verschiedene windschiefe Quadrupel enthält, während jedesmal die 6 übrigen Geraden je 2 Gerade des Quadrupels treffen.

Unsere bisherige Untersuchung der Systeme T hat also folgendes ergeben:

Es gibt 336 Systeme T. Jede Doppeltangente τ kommt in 120 Systemen vor. Auf einer Fläche $F(\tau)$ entsprechen den Systemen, die τ enthalten, die 120 Steinerschen Triederpaare; und den Systemen, die τ nicht enthalten, die 216 Gruppen von 10 Geraden, bestehend aus einem windschiefen Quadrupel und den 6 Geraden, welche dasselbe je 2mal treffen.

§ 12.

Nimmt man aus einem System T ein syz. Quadrupel von Doppeltangenten heraus, so bleibt eine Gruppe von 6 Doppeltangenten übrig, deren Eigenschaften einer näheren Untersuchung unterzogen werden sollen.

Ist τ eine der 4 Doppeltangenten des syz. Quadrupels, so entsprechen auf einer Fläche $F(\tau)$ den 3 andern Doppeltangenten desselben, die mit $t_{11}t_{12}t_{13}$ bezeichnet werden mögen, 3 Gerade $g_{11}g_{12}g_{13}$, die in einer Ebene liegen. Der übrig bleibenden Gruppe von 6 Doppeltangenten entsprechen also 2 Dreiecke von $F(\tau)$, welche mit dem genannten ein Triederpaar bilden. Die Ebenen dieser beiden Dreiecke schneiden sich längs einer Geraden, welche nicht der Fläche $F(\tau)$ vollständig angehört. Diese Gerade hat demnach mit der Fläche 3 Punkte gemein. Jede Gerade der beiden Dreiecke muß durch einen dieser 3 Punkte gehen. Die beiden Dreiecke befinden sich also in räumlicher perspektivischer Lage. Die 6 entsprechenden Doppeltangenten bilden demnach ein ebenes Pascalsches Sechseck. Die beiden Dreiecke mögen mit $g_{21}g_{22}g_{23}$ und $g_{31}g_{32}g_{33}$ bezeichnet werden, und zwar derart, daß $g_{21}g_{31}$, $g_{22}g_{32}$ und $g_{23}g_{33}$ die 3 Paare von Geraden seien, die sich auf der Schnittlinie der beiden Dreiecksebenen treffen. Dann ist $t_{21}t_{22}t_{23}t_{31}t_{32}t_{33}$ das zugehörige Pascalsche Sechseck. Dasselbe zerfällt in 3 Paare $t_{21}t_{31}$,

$t_{22}t_{32}$, $t_{23}t_{33}$, welche, wie unmittelbar aus der Vergleichung mit den entsprechenden Geraden hervorgeht, die Eigenschaft haben, daß je 3 Doppeltangenten aus 3 verschiedenen Paaren syz., je 3 Doppeltangenten aus 2 Paaren azyg. sind (Frobenius, Crelles Journ. Bd. 103, S. 168). Eine Gruppe von 6 Doppeltangenten mit dieser Eigenschaft möge als ein „System P" bezeichnet werden.

Wenn nun umgekehrt die 3 Paare t_1t_1', t_2t_2' und t_3t_3' ein System P bilden, so gibt es zunächst eine Doppeltangente τ, die das syz. Tripel $t_1t_2t_3$ zu einem syz. Quadrupel ergänzt. Auf einer Fläche $F(\tau)$ gehört zu diesem Tripel ein Dreieck $g_1g_2g_3$. Da nun $t_1t_2t_3'$ ein syz. Tripel ist, die Gerade g_3' aber nicht g_1 und g_2 zugleich schneiden kann, so muß sie zu beiden windschief sein, also g_3 schneiden. Ebenso wird g_1 von g_1' und g_2 von g_2' geschnitten. Nun sind aber $t_1t_1't_2'$ azyg., folglich muß g_2' eine der beiden sich schneidenden Geraden g_1g_1' treffen. Das kann aber nur g_1' sein. Aus analogem Grunde schneiden sich g_1' und g_3', sowie g_2' und g_3'. Die Geraden $g_1'g_2'g_3'$ liegen also auch in einer Ebene. Daraus ergibt sich zunächst: Jedes System P bildet ein Pascalsches Sechseck. Es folgt aber weiter daraus: Wenn man ein System P in 2 syz. Tripel teilt, so werden beide durch eine und dieselbe Doppeltangente zu syz. Quadrupeln ergänzt; auf einer zu dieser Doppeltangente gehörigen Fläche entsprechen dem Systeme P 2 Dreiecke ohne gemeinsame Seite.

Man kann ein System P auf 4 verschiedene Arten in 2 syz. Tripel teilen, wie eine leichte Abzählung sofort ergibt. Es existieren also unter den 22 übrigen Doppeltangenten 4 von der Beschaffenheit, daß auf den zugehörigen Flächen dem Systeme P 2 Dreiecke ohne gemeinsame Seite entsprechen. Wenn umgekehrt irgend eine Doppeltangente die Eigenschaft hat, daß auf einer ihr zugeordneten Fläche einem Systeme P ein Dreieckspaar ohne gemeinsame Seite entspricht, so ergänzt sie die den beiden Dreiecken entsprechenden Tripel des Systems P zu syz. Quadrupeln. Es kann also unter den 22 nicht zu P gehörigen Doppeltangenten

außer den 4 bereits genannten keine geben, die in einer solchen Beziehung zu P stehen, daß auf den zu ihnen gehörigen Flächen dem Systeme P 2 Dreiecke entsprechen.

Sind nun $g_1'' g_2'' g_3''$ die 3 Geraden von $F(\tau)$, welche die beiden Dreiecke $g_1 g_2 g_3$ und $g_1' g_2' g_3'$ zu einem Triederpaare ergänzen, so bildet t_1'' mit den beiden syz. Tripeln $t_1 t_2' t_3'$ und $t_1' t_2 t_3$ 2 syz. Quadrupel. Ebenso ergänzen t_2'' und t_3'' 2 andere in P enthaltene syz. Tripel zu syz. Quadrupeln. Die 4 Doppeltangenten, welche die Eigenschaft haben, je 2 syz. Tripel, in die sich P zerlegen läßt, zu syz. Quadrupeln zu ergänzen, bilden daher mit P ein System T. Folglich ist jedes System P in einem und nur einem Systeme T enthalten, zu welchem außer P noch ein syz. Quadrupel gehört.

Jedem Systeme T entspricht auf einer Fläche, die zu einer Doppeltangente von T gehört, ein Steinersches Triederpaar. Nehmen wir irgend ein Dreieck von demselben weg, so bleiben 2 Dreiecke ohne gemeinsame Seite übrig. Jedes System T enthält also ebenso viele Systeme P, als es syz. Quadrupel enthält. Jede Doppeltangente von T ist in 6 syz. Quadrupeln des Systems enthalten. Die Anzahl der in T enthaltenen syz. Quadrupel und damit auch der in T enthaltenen Systeme P ist also $\frac{6.10}{4} = 15$. Mithin gibt es im ganzen $336.15 = 5040$ Systeme P.

Einem Systeme T entspricht auf jeder Fläche, die einer nicht in T enthaltenen Doppeltangente zugeordnet ist, eine Gruppe von 10 Geraden, die sich auf 5 verschiedene Arten in 4 windschiefe und 6 dieselben je 2 mal schneidende Gerade teilen lassen. Jedem der in T enthaltenen syz. Quadrupel muß ein Doppelzweiseit, d. h. 4 von den 6 doppelt schneidenden Geraden, entsprechen. Dem Systeme P, das den zweiten Bestandteil von T bildet, entsprechen also 4 windschiefe Gerade und 2 einander schneidende Gerade, von denen jede 2 Gerade des windschiefen Quadrupels trifft.

Umgekehrt kann jede Gruppe von 6 Geraden dieser Art durch Hinzufügung der 4 andern Geraden, welche das

windschiefe Quadrupel 2 mal treffen, zu einer solchen Gruppe von 10 Geraden erweitert werden, welcher ein System T zugeordnet ist. Die 4 hinzugefügten Geraden entsprechen einem syz. Quadrupel, mithin die 6 ursprünglichen Geraden einem Systeme P.

Es sei τ eine Doppeltangente, die einem gegebenen Systeme P angehört. Erweitert man dasselbe zu einem Systeme T, so entsprechen den 9 von τ verschiedenen Doppeltangenten dieses Systems auf einer Fläche $F(\tau)$ die 9 Geraden eines Triederpaares

$$g_{11}\, g_{12}\, g_{13}$$

$$g_{21}\, g_{22}\, g_{23}$$

$$g_{31}\, g_{32}\, g_{33}.$$

Die 4 Doppeltangenten, die das ursprüngliche System P zu einem Systeme T erweitert haben, müssen einem in diesem Triederpaare enthaltenen Doppelzweiseit entsprechen. Angenommen, die Bezeichnung sei so gewählt, daß das Doppelzweiseit $(g_{13}\, g_{23};\ g_{31}\, g_{32})$ dem hinzugefügten syz. Quadrupel entspreche. Dann ist ersichtlich, daß dem Systeme P ein windschiefes Vierseit $g_{11}\, g_{12}\, g_{22}\, g_{21}$ und dessen Gegengerade g_{33} zugeordnet sind.

Wenn umgekehrt auf einer Fläche $F(\tau)$ ein windschiefes Vierseit und seine Gegengerade gegeben sind, so läßt sich dasselbe stets durch Hinzufügung eines Doppelzweiseits zu einem Triederpaare vervollständigen. Dem Triederpaare korrespondieren 9 Doppeltangenten, die mit τ ein System T bilden. Dem hinzugefügten Doppelzweiseit entspricht ein in T enthaltenes syz. Quadrupel. Mithin muß dem windschiefen Vierseit mit seiner Gegengeraden eine Gruppe von 5 Doppeltangenten zugeordnet sein, die durch τ zu einem System P ergänzt wird.

Es gibt 32 Dreiecke auf einer Fläche 3. Ordnung, die mit einem gegebenen Dreiecke derselben keine Seite gemein haben. Die Anzahl aller Paare von Dreiecken ohne gemeinsame Seite ist also $\frac{45.32}{2} = 720$. Es gibt ferner 1080 Qua-

drupel windschiefer Geraden. Zu jedem derselben gehören 3 Paare sich schneidender Geraden, deren jede 2 von ihnen schneidet. Es gibt also 3.1080 = 3240 Gruppen von 6 Geraden, bestehend aus 4 windschiefen und 2 sie paarweise treffenden Geraden. Endlich ist jede Gerade Gegengerade zu 40 windschiefen Vierseiten, während umgekehrt jedes windschiefe Vierseit nur eine Gegengerade besitzt. Es gibt also 27.40 = 1080 Gruppen von 5 Geraden, bestehend aus einem windschiefen Vierseite und seiner Gegengeraden.

Die wesentlichen Resultate dieses Paragraphen lassen sich in folgenden Satz zusammenfassen:

Es gibt 5040 Systeme P (Hesse, Crelles Journ. Bd. 49, S. 326). Jede Doppeltangente τ kommt in 1080 Systemen vor. Auf einer Fläche $F(\tau)$ entsprechen den Systemen, die τ enthalten, die 1080 windschiefen Vierseite mit ihren Gegengeraden, dagegen den Systemen, die τ nicht enthalten, 1. die 720 Dreieckspaare ohne gemeinsame Seite und 2. die 3240 Gruppen von 6 Geraden, bestehend aus 4 windschiefen und 2 sie paarweise treffenden Geraden. Mit jedem Systeme P ist ein syz. Quadrupel von der Beschaffenheit verbunden, daß auf den zu den 4 Doppeltangenten desselben gehörigen Flächen dem Systeme P ein Dreieckspaar entspricht, während demselben auf jeder der andern 18 Flächen 4 windschiefe und 2 sie paarweise treffende Gerade zugeordnet sind. Das syz. Quadrupel bildet mit dem Systeme P ein System T.

Außerdem ergeben sich für die Flächen 3. Ordnung die beiden Sätze:

1. Irgend 4 windschiefe Gerade einer Fläche 3. Ordnung und 2 sie paarweise treffende Gerade werden von jedem Punkte aus, der auf der Fläche, aber nicht in einer Geraden derselben liegt, als ein Pascalsches Sechseck projiziert.

2. Die 5 Ebenen, welche die Geraden eines windschiefen Vierseits einer Fläche 3. Ordnung und dessen Gegengerade mit einem beliebigen auf der Fläche, aber nicht in einer Geraden derselben liegenden Punkte verbinden, bilden mit der Tangentialebene in diesem Punkte ein Pascalsches Sechskant.